

文章编号: 1000-7598 (2009) 02-536-06

基于哈密顿体系辛几何算法求解空间地基问题

杨有贞, 葛修润, 黄 铭

(上海交通大学 船舶海洋与建筑工程学院, 上海 200240)

摘 要: 地基应力和位移场的求解是岩土工程中的基本问题之一, 以往的求解方法是在一类变量范围内求解, 属于拉格朗日体系。利用弹性力学的哈密顿理论, 通过适当的变量代换, 由力学的控制方程引入对偶变量, 直接将方程导入到哈密顿体系, 应用分离变量法求解。在哈密顿体系下, 利用辛几何的性质, 在完备的解空间内将方程的解用本征向量函数展开, 讨论零本征值和非零本征值对应的不同本征解及其物理意义。数值算例表明, 所得结果同以往结果一致。该方法不同于传统方法, 为地基的研究提供了一条新途径和思路。

关 键 词: 哈密顿体系; 辛几何空间; 本征函数向量; 横观各向同性; 拉普拉斯变换

中图分类号: TU 470; TB 113

文献标识码: A

Hamilton system and symplectic algorithm for space foundation

YANG You-zhen, GE Xiu-run, HUANG Ming

(School of Naval Architectures, Ocean and Civil Engineering, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200240, China)

Abstract: It is a basic problem to solve the space foundation in geotechnical engineering. The problem is always solved with one kind of variables in traditional methodology, which is under Lagrange system. Dual variables were employed into the governing equations of mechanics via variable substitutions. Through this way, the governing equations were transmitted into Hamiltonian system. Therefore, the methods of separation of variables can be applied to solving the problem. In the completed solution space, the eigenfunction expansion of the solutions of the equations was obtained by the use of the properties of symplectic geometry. Discussed the zero and nonzero eigenvalues of the equations and their physical meanings. Different from the traditional methods, the paper gives a direct method to solve the problem of the half space foundation

Key words: Hamilton system; symplectic method; eigenfunction; transversely isotropy; Laplace transform

1 引 言

对于地基问题, 其理论上的困难和工程上的实用性, 一直是颇受学术界和工程界重视的研究课题。纵观国内外研究发展史, 其基本求解方法有: 位移应力函数法^[1-2]、积分变换法^[3]、传递矩阵法^[4-6]等。每种方法各有所长, 但也存在缺点, 一个重要的因素是它们所依赖的体系为一类变量问题, 属于拉格朗日体系。因此, 有必要引进一种新的研究体系。随着最优控制模拟理论的建立, 哈密顿体系被引入到应用力学和椭圆型偏微分方程中, 该方法在

理论和计算机处理上都显出了很大的优点^[7-11], 而且对层状结构也是特别的适用^[12-13]。

地基是个较为复杂的受力系统, 为探求其位移、应力性质, 并给出明确且便于应用的解的表达式, 可以在合理假设基础上进行有效分析求解, 其中横观各向同性体是较为符合地基实际情况的一种模型。在此基础上, 本文探索性地将哈密顿体系引入到地基的研究中, 采用辛几何算法, 利用 Laplace 变换推导出了横观各向同性半无限空间体地基位移和应力解的一般表达式, 为今后的具体分析工作提供了一个新的理论平台, 可方便地推广到更复杂的

问题中。

2 哈密顿体系下的基本方程

在空间直接坐标系下, 将 z 坐标模拟为时间坐标, 并引入 $(\bullet) = (\bullet)/\partial z$, 则几何方程为

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \dot{u}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \dot{v}, \quad \varepsilon_z = \dot{w} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中: u 、 v 、 w 为 x 、 y 、 z 方向位移; ε_x 、 ε_y 、 ε_z 、 γ_{xy} 、 γ_{xz} 、 γ_{yz} 、 σ_x 、 σ_y 、 σ_z 、 τ_{xy} 、 τ_{xz} 、 τ_{yz} 分别是应变和应力分量。

物理方程为

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{aligned} \right\} = \begin{bmatrix} a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ b & a & c & 0 & 0 & 0 \\ c & c & d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{a-b}{2} \end{bmatrix} \left\{ \begin{aligned} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

当本构模型为横观各向同性时, 在同性面方向和垂直于该方向的性质存在差异, 呈现各向异性现象, 有 5 个弹性参数:

$$\left. \begin{aligned} a &= \lambda n(1 - nv_2^2), \quad b = \lambda n(v_1 - nv_2^2), \\ c &= \lambda nv_2(1 + v_1), \quad d = \lambda(1 - v_1^2), \quad k = G_2 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中: $n = \frac{E_1}{E_2}$, $\lambda = \frac{E_2}{(1 + v_1)(1 - v_1 - 2nv_2^2)}$, E_1 、 v_1 为

横观各向同性面 (xoy 面) 内的弹性模量和泊松比; E_2 、 v_2 为垂直横观各向同性面 (xoy 面) 内的弹性模量和泊松比; G_2 为垂直横观各向同性面 (与 xoy 平面垂直) 内的剪切模量。

相应的拉格朗日函数可表示为

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \left[a \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + a \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + d(\dot{w})^2 \right] + \\ &\quad \frac{k}{2} \left(\dot{v} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{k}{2} \left(\dot{u} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{a-b}{4} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (4) \\ &\quad b \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + c \frac{\partial u}{\partial x} \dot{w} + c \frac{\partial v}{\partial y} \dot{w} + f_x u + f_y v + f_z w \end{aligned}$$

式中: f_x 、 f_y 、 f_z 分别表示外荷载在 x 、 y 、 z 三个方向的分量。如果对式 (4) 进行变分, 可以得到通

常意义下的基本方程。为建立哈密顿体系, 引入对偶变量:

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= \partial L / \partial \dot{u} = k(\dot{u} + \partial_x w) = \tau_{zx} \\ p_2 &= \partial L / \partial \dot{v} = k(\dot{v} + \partial_y w) = \tau_{yz} \\ p_3 &= \partial L / \partial \dot{w} = d\dot{w} + c\partial_x u + c\partial_y v = \sigma_z \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

可见, 位移的对偶就是应力。若记向量 $\mathbf{q} = \{u, v, w\}^T$, 其对偶向量 $\mathbf{p} = \{p_1, p_2, p_3\}^T$ 。于是, 哈密顿函数 $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \mathbf{p}^T \dot{\mathbf{q}} - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, 利用变分原理可得对偶方程:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{p}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta H / \delta \mathbf{p} \\ -\delta H / \delta \mathbf{q} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{M}_2 \\ \mathbf{M}_3 & -\mathbf{M}_1^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

其中, $\mathbf{M}_1$ 、 $\mathbf{M}_2$ 、 $\mathbf{M}_3$ 分别为

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\partial_x \\ 0 & 0 & -\partial_y \\ -\frac{c}{d}\partial_x & -\frac{c}{d}\partial_y & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 1/k & 0 & 0 \\ 0 & 1/k & 0 \\ 0 & 0 & 1/d \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\mathbf{M}_3 =$$

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{c^2}{d} - a \right) \partial_x^2 + \frac{b-a}{2} \partial_y^2 & \left(\frac{c^2}{d} - \frac{b-a}{2} \right) \partial_{xy}^2 & 0 \\ \left(\frac{c^2}{d} - \frac{b+a}{2} \right) \partial_{xy}^2 & \left(\frac{c^2}{d} - a \right) \partial_y^2 + \frac{b-a}{2} \partial_x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

式中: ∂_x 、 ∂_y 分别为函数对 x 、对 y 变量的一阶偏微分; ∂_x^2 、 ∂_y^2 、 ∂_{xy}^2 分别为函数对 x 、 y 、 x 和 y 的二阶偏微分。令全状态向量 $\Phi = \{\mathbf{q}^T, \mathbf{p}^T\}^T$, 则对偶方程组 (6) 可简写为

$$\Phi = H\Phi + \mathbf{f} \quad (10)$$

非齐次项 $\mathbf{f} = \{0, 0, 0, f_x, f_y, f_z\}^T$ 是外力可通过叠加一个特解消去, 以下不妨先取 $\mathbf{f} = 0$ 。

3 分离变量及共轭辛正交归一关系

讨论式 (10) 的齐次方程, 采用广义分离变量法可得到解:

$$\Phi(x, y, z) = \mathbf{Y}(x, y) \mathbf{e}^{\mu z} \quad (11)$$

式中: μ 为本征值, 而本征解 Y 满足方程:

$$HY = \mu Y \quad (12)$$

可以证明^[9-11, 14]以下性质:

(1) H 是哈密顿算子矩阵。

(2) 本征值与本征向量都是成共轭对出现的, 如果 μ 是本征值, $-\mu$ 也一定是本征值, 即非 0 本征值可分为两类: $\mu_\alpha (\text{Re}(\mu_\alpha) < 0 \text{ 或 } \text{Re}(\mu_\alpha) = 0, \text{ 同时 } \text{Im}(\mu_\alpha) < 0)$ 和 $\mu_\beta (\mu_\beta = -\mu_\alpha)$ 。

(3) 本征向量与共轭向量之间存在辛正交关系, 定义泛函 $\langle Y_i^T, J, Y_j \rangle = \int Y_i^T J Y_j dy$, 这里 J 为换算旋转单位算子, 存在共轭辛正交归一关系:

$$\left\{ \begin{aligned} \langle Y_{\alpha_i}^T, J, Y_{\beta_j} \rangle &= \delta_{ij}, \quad \langle Y_{\beta_i}^T, J, Y_{\alpha_j} \rangle = -\delta_{ij} \\ \langle Y_{\alpha_i}^T, J, Y_{\alpha_j} \rangle &= \langle Y_{\beta_i}^T, J, Y_{\beta_j} \rangle = 0 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

(4) 由本征函数生成的本征解空间是完备的。

(5) 任意状态向量总是可由本征函数向量组线性组合表示, 即

$$Y = \sum_j (A_j Y_{\alpha_j} + B_j Y_{\beta_j}) \quad (14)$$

由共轭辛正交归一关系得到系数:

$$\left\{ \begin{aligned} A_j &= -\langle Y_{\beta_j}^T, J, Y \rangle \\ B_j &= -\langle Y_{\alpha_j}^T, J, Y \rangle \end{aligned} \right. \quad (15)$$

进一步可得

$$A_j = A_{j0} e^{\mu_j z}, \quad B_j = B_{j0} e^{-\mu_j z} \quad (16)$$

式中: 常数 A_{j0} 、 B_{j0} 由端边界条件确定。

4 零本征解

零本征解是一个很特殊的解, 在 α 、 β 的分类描述中尚未加以覆盖, 式 (12) 中零本征问题为

$$\mu = 0, \quad HY = 0 \quad (17)$$

考虑边界条件, 如图 1 所示。

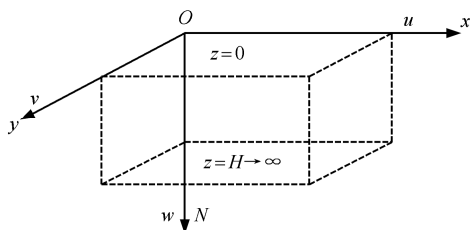


图 1 半空间地基物理模型

Fig.1 The mode of half-space multi-layered sub-grade

这里以横观各向同性半空间地基为分析对象, 在特定情况下一些多层横观各向同性地基可以近似退化为这种情况, 在其表面作用一集中力 $z=0$ (上表面), 地基表面有外荷载时, $p_1(x, y, 0)$ 、 $p_2(x, y, 0)$ 、 $p_3(x, y, 0)$ 已知, $z=h \rightarrow \infty$, 根据圣维南 (Saint-Venant) 原理可知, 位移趋近于 0。

在求解零本征解时, 仅考虑齐次方程, 即暂时不计外力, 则图 1 所示地基模型的边界条件为

$$\left\{ \begin{aligned} z=0, \quad p_1(\tau_{zx})=0, \quad p_2(\tau_{yz})=0, \quad p_3(\sigma_z)=0 \\ z=h \rightarrow \infty, \quad u=0, \quad v=0, \quad w=0 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

求得有基本解为

$$\left\{ \begin{aligned} Y_1^{(0)} &= [1, 0, 0, 0, 0, 0]^T \\ Y_2^{(0)} &= [0, 1, 0, 0, 0, 0]^T \\ Y_3^{(0)} &= [0, 0, 1, 0, 0, 0]^T \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

由 $HY = Y_i^{(0)} (i=1, 2, 3)$ 求得基本解的一阶约当型为

$$\left\{ \begin{aligned} Y_1^{(1)} &= [0, 0, c_1 x, 0, 0, 0]^T \\ Y_2^{(1)} &= [0, 0, c_2 y, 0, 0, 0]^T \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

式 (19) 中 $Y_3^{(0)}$ 在侧边条件下不存在下一阶约当型本征向量, 式 (20) 中 $Y_1^{(1)}$ 、 $Y_2^{(1)}$ 也没有下一阶约当型本征向量, 则零本征通解为

$$\left\{ \begin{aligned} \Phi_1 &= Y_1^{(1)} + z Y_1^{(0)} \\ \Phi_2 &= Y_2^{(1)} + z Y_2^{(0)} \\ \Phi_3 &= Y_3^{(0)} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

将式 (19) 和式 (20) 代入式 (21), 可得到无限半空间体齐次方程的零本征解, 但此解对于地基而言是没有意义的。因此, 就要在本征展开中增加非零本征解。以下给出了地基问题中齐次方程的非零本征解的求解过程。

5 非零本征解

考虑齐次方程:

$$HY = \mu Y \quad (22)$$

将上式两边进行二维 Laplace 变换 (s, t 是变换参量), 得出:

$$\tilde{H} \tilde{Y} = \tilde{\mu} \tilde{Y} \quad (23)$$

式中: $\tilde{Y}$ 为实施积分变换后的本征解; $\tilde{\mu}$ 为变换后的本征值; $\tilde{H}$ 为变换后的哈密顿矩阵, 具体表达式为

$$\tilde{H} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -s & \frac{1}{k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -t & 0 & \frac{1}{k} & 0 \\ -\frac{c}{d}s & -\frac{c}{d}t & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{d} \\ \left(\frac{c^2}{d}-a\right)s^2 + \frac{b-a}{2}t^2 & \left(\frac{c^2}{d}-\frac{a+b}{2}\right)st & 0 & 0 & 0 & -\frac{c}{d}s \\ \left(\frac{c^2}{d}-\frac{a+b}{2}\right)st & \left(\frac{c^2}{d}-a\right)t^2 + \frac{b-a}{2}s^2 & 0 & 0 & 0 & -\frac{c}{d}t \\ 0 & 0 & 0 & -s & -t & 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

至此问题归结为求解 $\tilde{H}$ 矩阵的特征值和特征向量, 求得

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\mu}_1 &= iA\sqrt{s^2+t^2}, & \tilde{\mu}_2 &= -iA\sqrt{s^2+t^2} \\ \tilde{\mu}_3 &= B\sqrt{s^2+t^2}, & \tilde{\mu}_4 &= -B\sqrt{s^2+t^2} \\ \tilde{\mu}_5 &= iC\sqrt{s^2+t^2}, & \tilde{\mu}_6 &= -iC\sqrt{s^2+t^2} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

其中:

$$A = \frac{1}{2k}\sqrt{2k(a-b)} > 0 \quad (26)$$

$$B = \frac{1}{2kd}\sqrt{(-2kd)(-Q-c^2-2kc+ad)} > 0 \quad (27)$$

$$C = \frac{1}{2kd}\sqrt{2kd(Q-c^2-2kc+ad)} > 0 \quad (28)$$

$$Q = \sqrt{c^4 + 4c^3k + 2c^2ad + 4k^2c^2 - 4kcad + a^2d^2 - 4k^2ad} \quad (29)$$

得到解向量后, 问题的通解总可写出:

$$\Phi = \sum_i C_i \Phi_i + \sum_j (A_j \tilde{Y}_{\tilde{\alpha}_j} e^{\tilde{\alpha}_j z} + B_j \tilde{Y}_{\tilde{\beta}_j} e^{\tilde{\beta}_j z}) \quad (30)$$

式(30)等式右端第1项为零本征解, 第2项为非零本征解的叠加。 A_j 、 B_j 、 C_j 为复常数, 由端边界条件来确定。根据本征值的分类和本征解的共轭关系, 可进一步将式(30)写成:

$$\Phi = \sum_i C_i \Phi_i + \sum_j \text{Re}(A_j \tilde{Y}_{\tilde{\alpha}_j} e^{\tilde{\alpha}_j z} + B_j \tilde{Y}_{\tilde{\beta}_j} e^{\tilde{\beta}_j z}) \quad (31)$$

式(30)第2项展开为

$$\begin{aligned} \tilde{u}(s, t, z) &= A_{10} e^{-Bz\sqrt{s^2+t^2}} + B_{10} e^{Bz\sqrt{s^2+t^2}} - \\ &\quad (A_{20} + B_{20}) \frac{t}{s} \cos(Az\sqrt{s^2+t^2}) + \\ &\quad (A_{30} + B_{30}) \cos(Cz\sqrt{s^2+t^2}) \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \tilde{v}(s, t, z) &= \frac{t}{s} (A_{10} e^{-Bz\sqrt{s^2+t^2}} + B_{10} e^{Bz\sqrt{s^2+t^2}}) - \\ &\quad (A_{20} + B_{20}) \cos(Az\sqrt{s^2+t^2}) + \\ &\quad (A_{30} + B_{30}) \frac{t}{s} \cos(Cz\sqrt{s^2+t^2}) \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \tilde{w}(s, t, z) &= \frac{\sqrt{s^2+t^2}}{s} D (-A_{10} e^{-Bz\sqrt{s^2+t^2}} + B_{10} e^{Bz\sqrt{s^2+t^2}}) - \\ &\quad N (A_{30} + B_{30}) \frac{\sqrt{s^2+t^2}}{s} \sin(Cz\sqrt{s^2+t^2}) \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \tilde{p}_1(s, t, z) &= F \sqrt{s^2+t^2} (-A_{10} e^{-Bz\sqrt{s^2+t^2}} + B_{10} e^{Bz\sqrt{s^2+t^2}}) + \\ &\quad (A_{20} + B_{20}) \frac{1}{2} \sqrt{2G(a-b)} \frac{\sqrt{s^2+t^2} t}{s} \sin(Az\sqrt{s^2+t^2}) - \\ &\quad (A_{30} + B_{30}) P \sqrt{s^2+t^2} \sin(Cz\sqrt{s^2+t^2}) \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \tilde{p}_2(s, t, z) &= F \frac{\sqrt{s^2+t^2}}{s} t (-A_{10} e^{-Bz\sqrt{s^2+t^2}} + B_{10} e^{Bz\sqrt{s^2+t^2}}) - \\ &\quad (A_{20} + B_{20}) \frac{1}{2} \sqrt{2G(a-b)} \sqrt{s^2+t^2} \sin(Az\sqrt{s^2+t^2}) - \\ &\quad (A_{30} + B_{30}) P \frac{\sqrt{s^2+t^2} t}{s} \sin(Cz\sqrt{s^2+t^2}) \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \tilde{p}_3(s, t, z) &= L \frac{s^2+t^2}{s} (A_{10} e^{-Bz\sqrt{s^2+t^2}} + B_{10} e^{Bz\sqrt{s^2+t^2}}) - \\ &\quad (A_{30} + B_{30}) M \frac{s^2+t^2}{s} \cos(Cz\sqrt{s^2+t^2}) \end{aligned} \quad (37)$$

D 、 F 、 L 、 M 、 P 、 N 分别为

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{2k^2 d(c+k)} \left(\frac{1}{2} ad - k^2 - kc - \frac{1}{2} c^2 + \frac{1}{2} Q \right) \cdot \\ &\quad \sqrt{(-2kd)(-Q-c^2-2kc+ad)} \end{aligned} \quad (38)$$

$$F = \frac{1}{2kd(c+k)} \left(\frac{1}{2}ad - \frac{1}{2}c^2 + \frac{1}{2}Q \right) \cdot \sqrt{(-2kd)(-Q - c^2 - 2kc + ad)} \quad (39)$$

$$L = -\frac{1}{c+k} \left(\frac{1}{2}ad - \frac{1}{2}c^2 + \frac{1}{2}Q \right) \quad (40)$$

$$M = -\frac{1}{c+k} \left(\frac{1}{2}ad - \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{2}Q \right) \quad (41)$$

$$P = \frac{1}{2kd(c+k)} \left(\frac{1}{2}ad - \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{2}Q \right) \cdot \sqrt{2kd(Q - c^2 - 2kc + ad)} \quad (42)$$

$$N = \frac{1}{2k^2d(c+k)} \left(-k^2 - kc + \frac{1}{2}ad - \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{2}Q \right) \cdot \sqrt{2kd(Q - c^2 - 2kc + ad)} \quad (43)$$

a 和 A 是完全独立的两个量, 且 A_j 、 B_j 、 C_i 和 A_{j0} 、 B_{j0} 与 A 、 B 、 C 亦是完全独立变量。

由 Laplace 逆变换得非零本征解为

$$\Phi = -\frac{1}{4\pi} \iint \tilde{Y}(s, t, z) e^{sx+ty} ds dt \quad (44)$$

则问题的通解为

$$\Phi(x, y, z) = \sum_i C_i \Phi_i - \frac{1}{4\pi} \iint \tilde{Y}(s, t, z) e^{sx+ty} ds dt \quad (45)$$

至此, 本文给出了横观各向同性半空间地基齐次方程的全部本征解形式。

对于非齐次方程, 即在有外荷载的作用下, 可通过叠加一个特解先化为齐次问题, 利用本征解展开及边界条件便可求解。

6 数值算例分析

由式 (45) 即可求得横观各向同性弹性半空间体的应力和位移。由于该积分表达式是含有相当复杂被积函数的双重广义积分, 故只能通过数值积分来完成。笔者利用“Mathematica”数学软件编制了相应的程序, 其中涉及到的 Laplace 反演, 由于其逆变换的精确数值实现难度较大, 因此, 也就出现了很多方法^[15], 所有这些方法中本文 GWR 和 FT 法的精确度较高^[16-18], 本文采用该数值反演方法。

为了验证本解答的正确性, 计算文献[19]中的半无限体表面在受集中切向力 $Q = 100$ kN 作用下的竖向附加力 σ_z 和位移 w , 选取集中荷载作用点在坐标系中的坐标为 (100, 100, 0), 方向与 x 轴一致。为了便于对比, 计算点相对于外力的空间位置与文献[19]一致, 选在坐标点 (100.866, 100.5, 0) 的正下方各参数量为: $E_1 = 5$ MPa, $E_2 = 10$ MPa, $G_2 = 3$ MPa, $\nu_1 = 0.25$, $\nu_2 = 0.25$, 层厚为 30 m, 假定底面位移为 0。

表 1 应力 σ_z 的计算结果 (单位: kPa)

Table 1 The calculating results of stress σ_z (unit: kPa)

计算结果	z/m					
	1	3	5	8	12	25
文献[19]	4.591	0.932	0.261	0.070	0.022	0.000
本文解	4.592	0.932	0.262	0.070	0.023	0.000

表 2 竖向位移 w 的计算结果 (单位: cm)

Table 2 The calculating results of stress w (unit: cm)

计算结果	z/m					
	1	3	5	8	12	25
文献[19]	0.120	0.033	0.013	0.002	0.000	0.000
本文解	0.121	0.033	0.014	0.002	0.000	0.000

7 结 论

(1) 首次将哈密顿系统辛几何算法引入到地基计算中, 利用拉普拉斯变换推导出了横观各向同性半无限空间地基解的一般形式, 推导过程严谨规范, 计算量小, 便于应用。其结果也为后续层状结构的具体研究奠定了基础。

(2) 所采用的辛对偶求解体系与传统的一类变量方法存在本质的差别, 其理性的公式推导求解可以克服以往拉格朗日体系欧几里德空间中半逆凑解法的不足, 该方法在地基中的应用既可以解决一定条件下地基的求解问题, 也为更复杂情况下的相关课题提供了良好的思路。

参 考 文 献

- [1] LOVE A EH. The stress produced in a semi-infinite solid by pressure on part of the boundary[J]. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London (Series A)*, 1929, 228: 337-420.
- [2] BOUSSINESQ J. Application des potentials[M]. Paris: Gauthier-Villars, 1885.
- [3] BURMISTER D M. The general theory of stress and displacements in layered soil system I[J]. *Applied Physics*, 1943, 16(2): 89-94.
- [4] 钟阳, 王哲人, 郭大智. 求解多层弹性半空间轴对称问题的传递矩阵法[J]. *土木工程学报*, 1992, 25(6): 37-

43.
ZHONG Yang, WANG Zhe-ren, GUO Da-zhi. Transfer matrix method for solving axisymmetrical multilayered problems in multilayered elastic half-space[J]. **China Civil Engineering Journal**, 1992, 25(6): 37—43.
- [5] 钟阳, 王哲人, 郭大智. 求解多层弹性半空间非轴对称问题的传递矩阵法[J]. **土木工程学报**, 1995, 28(1): 66—72.
ZHONG Yang, WANG Zhe-ren, GUO Da-zhi. Transfer matrix method for solving non-axisymmetrical multilayered problems in multilayered elastic half-space[J]. **China Civil Engineering Journal**, 1995, 28(1): 66—72.
- [6] 钟阳, 郭大智, 王哲人. 轴对称弹性半空间问题一般解的新方法[J]. **哈尔滨建筑大学学报**, 2001, 28(2): 44—50.
ZHONG Yang, GUO Da-zhi, WANG Zhe-ren. New way of the general solution of axial symmetry elastic half space problem[J]. **Harbin University of Civil Engineering and Architecture**, 2001, 28(2): 44—50.
- [7] YAO Wei-an, ZHONG Wan-xie. New solution system for circular sector plate bending and its application[J]. **Acta Mechanica Solid Sinica**, 1999, 12(4): 307—315.
- [8] 钟万勰, 欧阳华江, 邓子辰. 计算结构力学与最优控制[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 1993.
- [9] 姚伟岸, 钟万勰. 辛弹性力学[M]. 北京: 高等教育出版, 2002.
- [10] 钟万勰. 弹性力学求解新体系[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 1995.
- [11] 卓家寿, 周建方. 弹性力学辛体系研究进展[M]. **水利水电科技进展**, 2005, 25(2): 53—57.
- [12] 周建方, 卓家寿. Hamilton 求解体系[J]. **水利水电科技进展**, 1998, 18(5): 11—15.
- [13] 丁皓江. 横观各向同性弹性力学[M]. 杭州: 浙江大学出版社, 1997.
- [14] 钟万勰. 条形域弹性平面问题与哈密顿体系[J]. 大连: 大连理工大学学报, 1991, 31(4): 373—394.
ZHONG Wan-xie. Plane elasticity problem in strip domain and Hamiltonian system [J]. **Dalian University of Technology**, 1991, 31(4): 373—394.
- [15] ABATE J, CHOUDHURY G L, WHITT W. Numerical inversion evaluation[J]. **Computers and Structures**, 1998, 31: 229—243.
- [16] ABATE J, WHITT W. The Fourier series method for inverting transforms of probability distributions [J]. **Queueing Systems**, 1992, 10: 5—8.
- [17] PETER P. VALKO JOSEPH ABATE. Numerical inversion of 2D Laplace transforms applied to fractional diffusion equations[J]. **Applied Numerical Mathematics**, 2005, 53: 73—88.
- [18] 陈光敬, 赵锡宏. 成层横观各向同性体非轴对称问题的解析解[J]. **同济大学学报**, 1998, 26(5): 522—527.
CHEN Guang-jing, ZHAO Xi-hong. Transferring matrix method for solution of non-axi-symmetric load applied to layered cross-anisotropic body[J]. **Tongji University Natural Science**, 1998, 26(5): 522—527.

上接第 535 页

- [7] 伍石生. 压实黄土路基渗水特性和规律的研究[博士学位论文 D]. 西安: 西安公路交通大学, 1997.
- [8] 李志刚, 钱七虎, 陈云鹤. 土工构造物边坡冲刷临界坡度的研究[J]. **土木工程学报**, 2004, 37(2): 78—81.
LI Zhi-gang, TIAN Qi-hu, CHEN Yun-he. Research on critical gradient for erosion of the slope of the geotechnical structure[J]. **China Civil Engineering Journal**, 2004, 37(2): 78—81.
- [9] 李志刚, 张新宇. 基于能量法的高等级公路路堤边坡冲刷临界坡度研究[J]. **东南大学学报**, 2003, 33(3): 340—342.
LI Zhi-gang, ZHANG Xin-yu. Research on critical gradient for erosion of expressway embank slope based on energy method[J]. **Journal of Southeast University**, 2003, 33(3): 340—342.
- [10] 孔亚平, 张科利, 唐克丽. 坡长对侵蚀产沙过程影响的模拟研究[J]. **水土保持学报**, 2001, 15(2): 17—24.
KONG Ya-ping, ZHANG Ke-li, TANG Ke-li. Impacts of slope length on soil erosion process under simulated rainfall[J]. **Journal of Soil Water Conservation**, 2001, 15(2): 17—24.
- [11] LIU B Y, NEARING M A, RISSE L M. Slope gradient effects on soil loss for slopes[J]. **Transactions of the ASCE**, 1994, 37(6): 34—39.
- [12] 胡明鉴, 汪稔, 张平仓, 等. 蒋家沟流域坡面侵蚀特征试验研究[J]. **岩土力学**, 2002, 23(5): 645—648.
HU Ming-jian, WANG Ren, ZHANG Ping-chang, et, al. Experimental research on erosion characters on slope surface in Jiangjia Valley[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2002, 23(5): 645—648.
- [13] 胡明鉴, 汪稔, 孟庆山, 等. 降雨作用下砾石土斜坡坡面形态及临界特性[J]. **岩土力学**, 2006, 27(9): 1550—1553.
HU Ming-jian, WANG Ren, MENG Qing-shan, et, al. Gravelly soil slope surface shape and criticality under rainfall conditions[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2006, 27(9): 1550—1553.